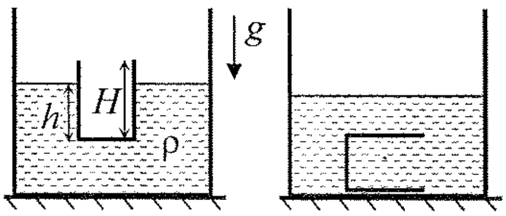
Открытая межвузовская олимпиада школьников СФО «Будущее Сибири» - 2010
2 этап (заключительный)
Физика 9 класс

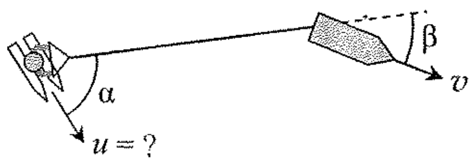
1. В цех для производства брошюр завезли большой рулон бумаги. За 12 дней непрерывной работы радиус рулона уменьшился в 2 раза. На сколько дней работы хватит оставшейся бумаги? Внутренний радиус рулона считать равным нулю.

2. Открытый сверху цилиндрический тонкостенный стакан высоты H и объёма V плавает в сосуде большего размера на поверхности жидкости плотности ρ, причём в жидкость погружена часть стакана высоты h. Стакан утопили в жидкости. С какой силой он давит на дно сосуда?

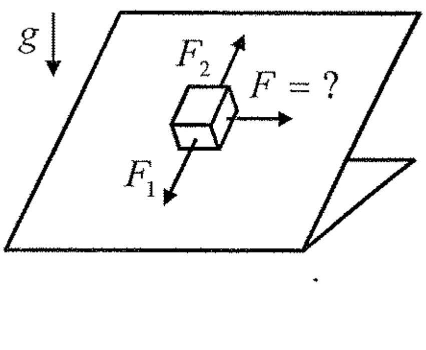


3. Раненный в пяту Ахиллес догоняет черепаху, ползущую от него с постоянной скоростью. Скорость бега Ахиллеса в 100 раз больше скорости черепахи. Добежав до точки, где находилась черепаха в момент его старта, Ахиллес отдыхает ровно столько времени, сколько бежал. Затем он снова стартует и бежит до точки, где находилась черепаха в момент его второго старта, после чего отдыхает столько времени, сколько бежал второй отрезок пути. Затем он снова бежит, снова отдыхает столько времени, сколько бежал очередной отрезок пути, и так до тех пор, пока не догонит черепаху. Во сколько раз быстрее Ахиллес догнал бы черепаху, если бы не отдыхал в пути?

4. Спортсмен направляет водные лыжи под углом α к фалу (буксировочному тросу), а буксирующий его катер движется со скоростью v под углом β к фалу. Фал не провисает. Найти скорость спортсмена u. Может ли скорость спортсмена превышать скорость катера?



5. Тело покоится на наклонной плоскости. Минимальное значение силы, которую необходимо приложить, чтобы сдвинуть тело, равно F_1, если сила направлена вдоль плоскости вниз, и F_2, если сила направлена вдоль плоскости вверх. Найти минимальную силу F, которую нужно приложить в горизонтальном направлении параллельно наклонной плоскости, чтобы сдвинуть тело.



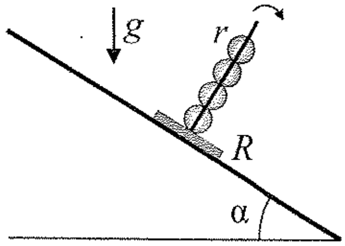
Внимание! Задача считается решённой, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения.

Желаем успехов!

Открытая межвузовская олимпиада школьников СФО «Будущее Сибири» - 2010
2 этап (заключительный)

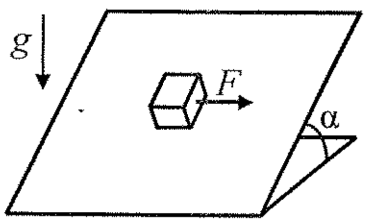
Физика 10 класс

1. На наклонном столе с углом α при вершине стоит невесомая подставка, представляющая собой тонкий диск радиуса R с закреплённой в его центре длинной спицей. На спицу нанизывают массивные шарики радиуса r. Сколько необходимо шариков, чтобы подставка опрокинулась?

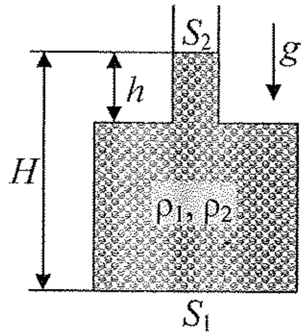


2. На сколько дней изменилось бы число дней в году, если бы Земля вращалась вокруг Солнца с той же скоростью по той же траектории, но в противоположном направлении, а вращение Земли вокруг своей оси осталось бы прежним? Число дней в году понимается в задаче как число солнечных восходов, наблюдаемых на экваторе за один оборот Земли вокруг Солнца.

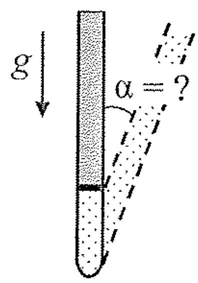
3. К телу массы m, покоящемуся на наклонной плоскости, прикладывают силу F в горизонтальном направлении параллельно наклонной плоскости. Найти величину ускорения тела. Коэффициент трения μ, угол наклона плоскости α. Ускорение свободного падения равно g.



4. В цилиндрический сосуд поперечного сечения S_1 с цилиндрическим горлышком поперечного сечения S_2 налили одинаковые объёмы двух несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 > \rho_2$). Сосуд хорошо взболтали, так что образовалась эмульсия — взвесь капелек одной жидкости в другой, — и поставили на стол. Уровень жидкости находится на высоте H от дна сосуда; горлышко заполнено до высоты h. Насколько изменится давление на дно сосуда после того как эмульсия опять расслоится на две компоненты? Ускорение свободного падения равно g.



5. Пробирка, расположенная вертикально в поле тяжести, заполнена на 1/3 газом и на 2/3 жидкостью. Жидкость находится сверху и отделена от газа тонким невесомым поршнем. Трение поршня о пробирку отсутствует. Внешнее давление равно нулю. На какой минимальный угол α нужно отклонить пробирку от вертикали, чтобы поршень вылетел из пробирки? Температуру считать постоянной.



Внимание! Задача считается решённой, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения.

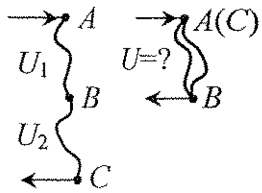
Желаем успехов!

Открытая межвузовская олимпиада школьников СФО «Будущее Сибири» - 2010

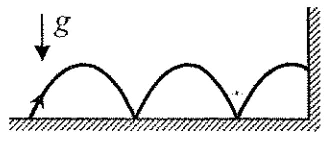
2 этап (заключительный)

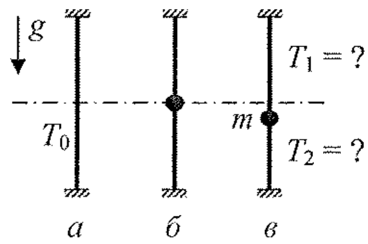
Физика 11 класс

1. К концам A и C проволоки присоединили проводники, по которым пропустили фиксированный ток. При этом напряжение между точками A и B равно U_1, а между точками B и C — равно U_2. Концы A и C проволоки соединили и к точкам B и $A(C)$ присоединили проводники, по которым пропустили тот же ток. Найти напряжение между точками A и B.

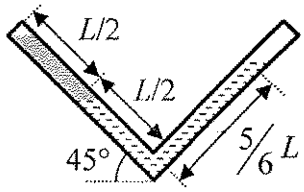


2. В плоскости, перпендикулярной вертикальной стене, скачет мяч, упруго ударяясь об пол. Время между соседними соударениями равно T. Мяч ударился о стену через время $\frac{2}{3}T$ после предыдущего удара об пол. На какой высоте мяч ударится о стену? Ускорение свободного падения равно g.



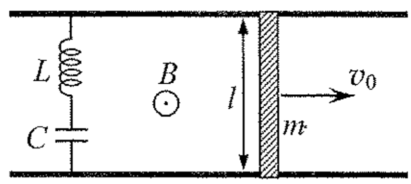


3. Между двумя неподвижными опорами вертикально натянули резиновый жгут до натяжения T_0 (рис. *а*). Затем к середине жгута подвесили груз массы m (рис. *б*) и отпустили (рис. *в*). Найти натяжение жгута над грузом (T_1) и под грузом (T_2) в новом положении равновесия. Ускорение свободного падения равно g.



4. Открытая с обоих концов однородная тонкая трубка длиной $2L$, согнутая посередине в виде буквы V с углом 90° при вершине, расположена в вертикальной плоскости. Колена трубки составляют угол 45° с горизонтом. Трубка заполнена: левое колено наполовину маслом, наполовину водой, в правом колене — столбик воды длиной $\frac{5}{6}L$. Трубку начали медленно поворачивать вправо — из неё стала вытекать вода. При некотором угле правого колена относительно горизонта вместе с водой начало вытекать масло. Найдите этот угол. Эффектами поверхностного натяжения пренебречь.

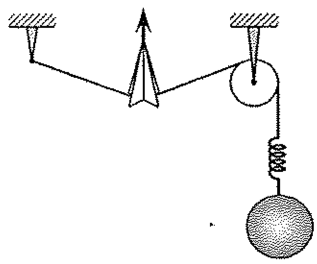
5. Первоначально покоящейся проводящей перемычке массы m и длины l ударом сообщили скорость v_0, и она начала без трения скользить по горизонтальным проводящим рельсам, концы которых соединены последовательно включенными катушкой индуктивностью L и первоначально разряженным конденсатором ёмкостью C.



Вертикально приложено однородное магнитное поле с индукцией B. Пренебрегая сопротивлением перемычки и рельсов, найти максимальный ток I_m в цепи.

6. Человек бросает снежок как можно дальше. Оценить среднюю силу, с которой рука действует на снежок во время броска. Предполагается, что Вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения задачи величины, выбрать их числовые значения и получить численный результат.

7. Один конец нити (тетивы), которую можно считать нерастяжимой, закреплён, а второй перекинут через блок и прикреплён к тяжёлому грузу. Полученную систему используют как «гравитационный лук»: лёгкую стрелу размещают в центре конструкции на тетиве, оттягивают тетиву и отпускают. Выясняется, что такой лук стреляет невысоко. Конструкцию усовершенствуют с помощью пружины, которую прикрепляют одним концом к тетиве, а вторым к грузу. Лук начинает стрелять значительно лучше. Объясните наблюдаемое явление.



Внимание! Задача считается решённой, если, в дополнение к правильному ответу, приведены необходимые объяснения.

Желаем успехов!

Открытая межвузовская олимпиада школьников СФО «Будущее Сибири» - 2010
2 этап (заключительный)

Физика 9 класс

Ключи к заданиям олимпиады (решения заданий)

Максимальная оценка каждого задания – 10 баллов

1. В цех для производства брошюр завезли большой рулон бумаги. За 12 дней непрерывной работы радиус рулона уменьшился в 2 раза. На сколько дней работы хватит оставшейся бумаги? Внутренний радиус рулона считать равным нулю.

Решение. Объём бумаги в рулоне пропорционален квадрату радиуса рулона:

$$V \propto R^2. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Объём израсходованной бумаги пропорционален:

$$\Delta V \propto R_{\text{нач}}^2 - R_{\text{кон}}^2, \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где $R_{\text{нач}}$ и $R_{\text{кон}}$ — начальный и конечный радиусы рулона. Время работы пропорционально объёму израсходованной бумаги:

$$\Delta t \propto R_{\text{нач}}^2 - R_{\text{кон}}^2. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

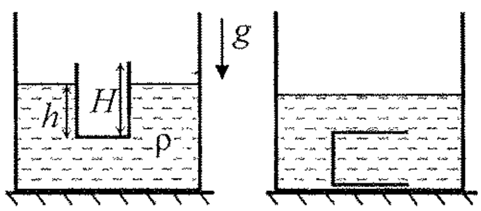
Обозначив через R_0 исходный радиус рулона, а через R_1 радиус после 12 дней работы, получаем пропорцию:

$$\frac{\Delta t}{12} = \frac{R_1^2 - 0}{R_0^2 - R_1^2}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Подставив сюда $R_1 = R_0/2$, найдём: $\Delta t = 4$ дня.

Ответ: оставшейся бумаги хватит на 4 дня. **(2 б.)**

2. Открытый сверху цилиндрический тонкостенный стакан высоты H и объёма V плавает в сосуде большего размера на поверхности жидкости плотности ρ, причём в жидкость погружена часть стакана высоты h. Стакан утопили в жидкости. С какой силой он давит на дно сосуда?



Решение. Когда стакан плавает, сила тяжести mg и сила Архимеда $\rho g S h$ (где $S = V/H$ — площадь сечения стакана) уравновешивают друг друга:

$$mg = \rho g S h = \rho g V \frac{h}{H}. \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Когда стакан полностью погружен, сила Архимеда пренебрежимо мала, так как стакан тонкостенный, а значит, объём вытесненной им жидкости пренебрежимо мал. Поэтому сила F, с которой стакан давит на дно, уравновешивает силу тяжести mg:

$$F = mg.$$ **(4 б.)**

Ответ: $F = \rho g V \dfrac{h}{H}$. **(2 б.)**

3. Раненный в пяту Ахиллес догоняет черепаху, ползущую от него с постоянной скоростью. Скорость бега Ахиллеса в 100 раз больше скорости черепахи. Добежав до точки, где находилась черепаха в момент его старта, Ахиллес отдыхает ровно столько времени, сколько бежал. Затем он снова стартует и бежит до точки, где находилась черепаха в момент его второго старта, после чего отдыхает столько времени, сколько бежал второй отрезок пути. Затем он снова бежит, снова отдыхает столько времени, сколько бежал очередной отрезок пути, и так до тех пор, пока не догонит черепаху. Во сколько раз быстрее Ахиллес догнал бы черепаху, если бы не отдыхал в пути?

Решение. Обозначим скорость черепахи v, тогда скорость бега Ахиллеса $u = 100\ v$. Поскольку Ахиллес бежал ровно столько времени, сколько отдыхал, то его средняя скорость $v_{ср}$ равна

$$v_{ср} = u/2.$$ **(2 б.)**

Средняя скорость Ахиллеса относительно черепахи $v_{отн1}$ равна

$$v_{отн1} = u/2 - v.$$ **(2 б.)**

Если бы Ахиллес не отдыхал в пути, то его скорость относительно черепахи $v_{отн2}$ была бы равна

$$v_{отн2} = u - v.$$ **(2 б.)**

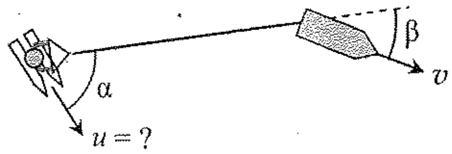
Искомое отношение времён k равно отношению средних относительных скоростей:

$$k = \frac{v_{отн2}}{v_{отн1}} = \frac{u - v}{u/2 - v}.$$ **(2 б.)**

Подставив $u = 100\ v$, получим $k = 99/49$.

Ответ: в 99/49 раз быстрее. **(2 б.)**

4. Спортсмен направляет водные лыжи под углом α к фалу (буксировочному тросу), а буксирующий его катер движется со скоростью v под углом β к фалу. Фал не провисает. Найти скорость спортсмена u. Может ли скорость спортсмена превышать скорость катера?



Решение. Чтобы фал не провисал, проекции скоростей спортсмена и катера на фал должны быть равны:

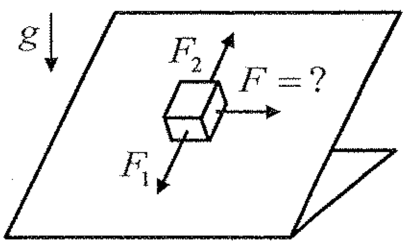
$$u\cos\alpha = v\cos\beta. \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Отсюда находим **ответ:** скорость спортсмена равна

$$u = v\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Видно, что при $|\alpha|>|\beta|$ скорость спортсмена превышает скорость катера. **(4 б.)**

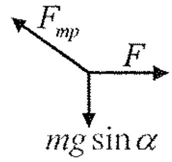
5. Тело покоится на наклонной плоскости. Минимальное значение силы, которую необходимо приложить, чтобы сдвинуть тело, равно F_1, если сила направлена вдоль плоскости вниз, и F_2, если сила направлена вдоль плоскости вверх. Найти минимальную силу F, которую нужно приложить в горизонтальном направлении параллельно наклонной плоскости, чтобы сдвинуть тело.



Решение. Поскольку силы F_1, F_2 и F действуют вдоль наклонной плоскости, то сила реакции опоры N, и соответственно, сила трения при движении тела $F_{тр} = \mu N$ будет одинаковой во всех трёх случаях. Чтобы сдвинуть тело, необходимо преодолеть силу трения, действующую на тело. Пусть α — угол наклона плоскости, m — масса тела. Уравнения равновесия тела при воздействии сил F_1 и F_2 имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &F_1 + mg\sin\alpha = F_{тр}, \qquad (1)\\ &F_2 - mg\sin\alpha = F_{тр}. \qquad (2)\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4 б.)}$$

В случае воздействия боковой силы F, проекция силы тяжести на наклонную плоскость перпендикулярна этой силе. Сила трения уравновешивает сумму этих двух сил. По теореме Пифагора,



$$F^2 + (mg\sin\alpha)^2 = F_{тр}^2. \qquad (3)$$ **(4 б.)**

Из (1) и (2) находим: $F_{тр} = \dfrac{F_1 + F_2}{2}, \quad mg\sin\alpha = \dfrac{F_2 - F_1}{2}. \qquad (4)$

Подставляя $F_{тр}$ и $mg\sin\alpha$ из (4) в (3), получаем $F = \sqrt{F_{тр}^2 - (mg\sin\alpha)^2} = \sqrt{F_1 F_2}$.

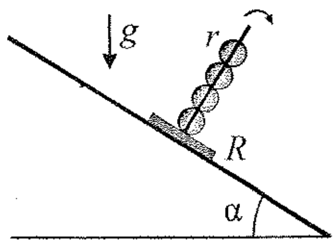
Ответ: $F = \sqrt{F_1 F_2}$. **(2 б.)**

Открытая межвузовская олимпиада школьников СФО «Будущее Сибири» - 2010
2 этап (заключительный)
Физика 10 класс

Ключи к заданиям олимпиады (решения заданий)

Максимальная оценка каждого задания – 10 баллов

1. На наклонном столе с углом α при вершине стоит невесомая подставка, представляющая собой тонкий диск радиуса R с закреплённой в его центре длинной спицей. На спицу нанизывают массивные шарики радиуса r. Сколько необходимо шариков, чтобы подставка опрокинулась?



Решение. Центр тяжести N шариков находится на расстоянии Nr от диска. **(2 б.)**

Чтобы подставка опрокинулась, необходимо, чтобы вертикаль, проходящая через центр тяжести шариков, не пересекала опору. **(3 б.)**

Так как проекция отрезка спицы длиной Nr на плоскость опоры равна $Nr\,\mathrm{tg}\alpha$, то условие опрокидывания подставки

$$Nr\,\mathrm{tg}\alpha \geq R \quad \Rightarrow \quad N \geq R\,\mathrm{ctg}\alpha/r. \qquad \textbf{(3 б.)}$$

Ответ: $N = \left[R\,\mathrm{ctg}\alpha/r\right]$. **(2 б.)**

2. На сколько дней изменилось бы число дней в году, если бы Земля вращалась вокруг Солнца с той же скоростью по той же траектории, но в противоположном направлении, а вращение Земли вокруг своей оси осталось бы прежним? Число дней в году понимается в задаче как число солнечных восходов, наблюдаемых на экваторе за один оборот Земли вокруг Солнца.

Решение. Перейдём в систему отсчёта, движущуюся *поступательно* вместе с центром Земли (не вращающуюся вокруг оси вращения Земли). В этой системе отсчёта Солнце вращается с угловой скоростью

$$\Omega = 1 \text{ оборот/год} \qquad \textbf{(4 б.)}$$

(такой выбор единиц измерения угловой скорости удобен в данной задаче, так как при этом величина угловой скорости совпадает с числом дней в году). Земля в этой системе отсчёта вращается с некоторой угловой скоростью ω ($\omega > \Omega$, знаки угловых скоростей совпадают). Число дней в году определяется относительной угловой скоростью вращения:

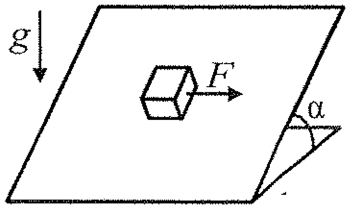
$$N = \omega - \Omega, \quad \text{а} \quad N' = \omega + \Omega, \qquad \textbf{(4 б.)}$$

где N' соответствует смене направления орбитального вращения Земли. Отсюда находим: $\Delta N = N' - N = 2\Omega = 2$ дня.

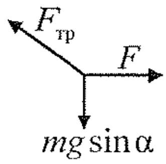
Ответ: число дней в году увеличилось бы на 2 дня. **(2 б.)**

Примечание: За ответы «изменилось бы на 2 дня» или даже «уменьшилось бы на 2 дня» **баллы не отнимать** (предполагается, что для школьника допустимо не знать соотношение направлений орбитального и суточного вращений Земли).

3. К телу массы m, покоящемуся на наклонной плоскости, прикладывают силу F в горизонтальном направлении параллельно наклонной плоскости. Найти величину ускорения тела. Коэффициент трения μ, угол наклона плоскости α. Ускорение свободного падения равно g.



Решение. Тело движется под некоторым углом к склону, в направлении результирующей силы F и составляющей силы тяжести вдоль наклонной плоскости $mg\sin\alpha$. Направление силы трения противоположно направлению движения тела, а значит, и направлению ускорения. Уравнение движения тела имеет вид:



$$\sqrt{F^2+(mg\sin\alpha)^2}-F_{тр}=ma. \qquad (1) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Сила трения $F_{тр}$, действующая на движущееся тело, равна $F_{тр}=\mu N$, где N — сила реакции опоры. Тело движется вдоль наклонной плоскости, поэтому сумма сил, действующих на тело, в проекции на нормаль к наклонной плоскости равна нулю:

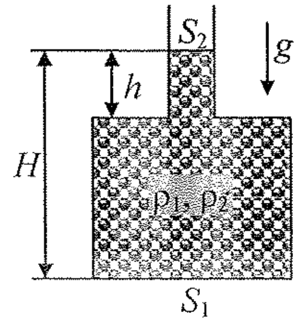
$$N-mg\cos\alpha=0 \quad\Rightarrow\quad F_{тр}=\mu mg\cos\alpha \quad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Из (1) и (2) находим: $$a=\sqrt{\left(\frac{F}{m}\right)^2+(g\sin\alpha)^2}-\mu g\cos\alpha. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Если $\sqrt{F^2+(mg\sin\alpha)^2}\le\mu mg\cos\alpha$ или $F\le mg\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$, то $a=0$. **(2 б.)**

Ответ: $a=\begin{cases}\sqrt{(F/m)^2+(g\sin\alpha)^2}-\mu g\cos\alpha, & \text{при } F>mg\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\\ 0, & \text{при } F\le mg\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\end{cases}.$

4. В цилиндрический сосуд поперечного сечения S_1 с цилиндрическим горлышком поперечного сечения S_2 налили одинаковые объёмы двух несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1>\rho_2$). Сосуд хорошо взболтали, так что образовалась эмульсия — взвесь капелек одной жидкости в другой, — и поставили на стол. Уровень жидкости находится на высоте H от дна сосуда; горлышко заполнено до высоты h. Насколько изменится давление на дно сосуда после того как эмульсия опять расслоится на две компоненты? Ускорение свободного падения равно g.



Решение. Пусть ρ — плотность эмульсии, V — её объём. Поскольку объёмы жидкостей одинаковы, справедливо соотношение:

$$\rho V = \rho_1 \frac{V}{2} + \rho_2 \frac{V}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Поэтому давление на дно сосуда равно: $P = \rho g H = \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2} gH.$ (1) **(1 б.)**

Т. к. $\rho_1 > \rho_2$, то после расслоения жидкость с плотностью ρ_1 займёт нижнее положение. Обозначим h_1 высоту слоя жидкости плотности ρ_1. Поскольку объёмы жидкостей одинаковы ($h_1 < H - h$):

$$h_1 S_1 = (H - h - h_1) S_1 + h S_2. \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Давление на дно есть сумма давлений двух жидкостей:

$$P' = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g (H - h_1). \qquad (3) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

Вычтя из уравнения (3) уравнение (1), найдём:

$$\Delta P = P' - P = -(\rho_1 - \rho_2) g \left(\frac{H}{2} - h_1 \right). \qquad (4)$$

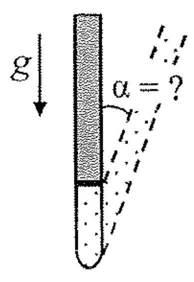
Из (2) найдём $\dfrac{H}{2} - h_1 = \dfrac{h}{2}\left(1 - \dfrac{S_2}{S_1}\right)$ и подставим в (4):

$$\Delta P = -\left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right) \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} gh.$$

Как видно, если $S_1 = S_2$ или $\rho_1 = \rho_2$, то $\Delta P = 0$, что и следовало ожидать.

Ответ: давление уменьшится на величину $\left(1 - \dfrac{S_2}{S_1}\right) \dfrac{\rho_1 - \rho_2}{2} gh.$ **(2 б.)**

5. Пробирка, расположенная вертикально в поле тяжести, заполнена на 1/3 газом и на 2/3 жидкостью. Жидкость находится сверху и отделена от газа тонким невесомым поршнем. Трение поршня о пробирку отсутствует. Внешнее давление равно нулю. На какой минимальный угол α нужно отклонить пробирку от вертикали, чтобы поршень вылетел из пробирки? Температуру считать постоянной.



Решение. Найдём положение равновесия поршня, когда пробирка отклонена на угол α от вертикали. Согласно закону Бойля-Мариотта ($PV = \text{const}$),

$$Px = P_0 \frac{L}{3}, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где P — давление газа в пробирке, P_0 — первоначальное давление газа, x — расстояние поршня от дна пробирки, L — высота пробирки. Так как внешнее давление равно нулю, то давление газа уравновешивается давлением столбика жидкости над ним:

$$P = \rho g (L - x)\cos\alpha, \qquad (2) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

$$P_0 = \rho g \frac{2L}{3}. \qquad (3) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим уравнение для x:

$$x^2 - Lx + \frac{2L^2}{9\cos\alpha} = 0. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

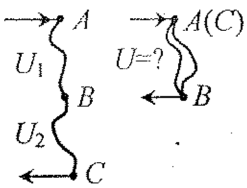
Дискриминант этого уравнения $D = L^2\left(1 - \dfrac{8}{9\cos\alpha}\right)$ обращается в ноль при $\alpha = \arccos(8/9)$. При $\alpha \le \arccos(8/9)$ дискриминант лежит в пределах $0 \le D \le L^2/9$, откуда следует, что корни уравнения лежат в пределах $L/3 \le D \le 2L/3$. Если же $\alpha > \arccos(8/9)$, то $D < 0$ и равновесного положения поршня в пробирке не существует, т. е. поршень не может находиться в пробирке. Поэтому при «критическом» угле $\alpha = \arccos(8/9)$ поршень вылетит из пробирки.

Ответ: $\alpha = \arccos\left(\dfrac{8}{9}\right)$. **(4 б.)**

Открытая межвузовская олимпиада школьников СФО «Будущее Сибири» - 2010
2 этап (заключительный)
Физика 11 класс

Ключи к заданиям олимпиады (решения заданий)

Максимальная оценка каждого задания – 10 баллов



1. К концам A и C проволоки присоединили проводники, по которым пропустили фиксированный ток. При этом напряжение между точками A и B равно U_1, а между точками B и C — равно U_2. Концы A и C проволоки соединили и к точкам B и $A(C)$ присоединили проводники, по которым пропустили тот же ток. Найти напряжение между точками A и B.

Решение.

Пусть величина тока равна I. По закону Ома

$$R_{AB} = \frac{U_1}{I}, \quad R_{BC} = \frac{U_2}{I}, \qquad (1)$$ **(3 б.)**

где R_{AB}, R_{BC} — сопротивления соответствующих кусков проволоки. При параллельном соединении этих кусков полное сопротивление равно:

$$R = \frac{R_{AB}R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC}}, \qquad (2)$$ **(3 б.)**

Искомое напряжение: $$U = IR, \qquad (3)$$ **(2 б.)**

где I — (по условию задачи) тот же ток, что и в первом случае. Подставив (1) в (2), а результат в (3), получим искомое напряжение.

Ответ: $U = \dfrac{U_1 U_2}{U_1 + U_2}$. **(2 б.)**

2. В плоскости, перпендикулярной вертикальной стене, скачет мяч, упруго ударяясь об пол. Время между соседними соударениями равно T. Мяч ударился о стену через время $\frac{2}{3}T$ после предыдущего удара об пол. На какой высоте мяч ударится о стену? Ускорение свободного падения равно g.

Решение.

Направим ось y перпендикулярно полу. За период T проекция скорости мяча на ось y скорость меняется с $+v_{0y}$ до $-v_{0y}$. Значит,

$$2v_{0y} = gT. \qquad (1) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

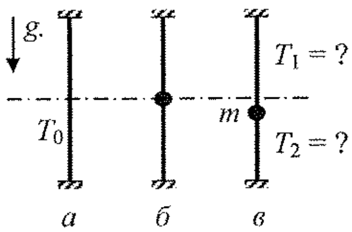
$$h = v_{0y}\cdot\frac{2}{3}T - \frac{g}{2}\left(\frac{2}{3}T\right)^2. \qquad (2) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Подставив в (2) v_{0y} из (1), находим

$$h = \frac{gT}{2}\cdot\frac{2}{3}T - \frac{gT^2}{2}\frac{4}{9} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{9}\right)gT^2 = \frac{1}{9}gT^2.$$

Ответ: $h = \frac{1}{9}gT^2$. **(2 б.)**

3. Между двумя неподвижными опорами вертикально натянули резиновый жгут до натяжения T_0 (рис. *а*). Затем к середине жгута подвесили груз массы m (рис. *б*) и отпустили (рис. *в*). Найти натяжение жгута над грузом (T_1) и под грузом (T_2) в новом положении равновесия. Ускорение свободного падения равно g.



Решение.

Представим жгут на рис. *а* как два соединенных одинаковых жгута половинной длины. Пусть жесткость каждого k. Тогда, по закону Гука:

$$T_0 = k\Delta x, \qquad (1)$$

где Δx — растяжение каждого из жгутов.

Пусть смещение груза относительно середины на рис. *в* равно $\Delta x'$. Тогда

$$T_1 = k(\Delta x + \Delta x'). \qquad (2)$$

Если $\Delta x' < \Delta x$ (т.е. нижний жгут не провисает):

$$T_2 = k(\Delta x - \Delta x'). \qquad (3)$$

Из (1) и (3) получим

$$T_1 + T_2 = 2T_0. \qquad (4) \qquad \textbf{(5 б.)}$$

Равенство сил в новом положении равновесия даёт:

$$T_1 - T_2 = mg\,. \qquad (5) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Из (4) и (5) находим

$$T_1 = T_0 + \frac{1}{2}mg, \quad T_2 = T_0 - \frac{1}{2}mg\,. \qquad (6) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Как следует из (6) нижний жгут провисает, если $T_0 - mg/2 < 0$, т.е. когда $mg > 2T_0$.

В этом случае равенство сил в новом положении равновесия даёт

$$T_1 = mg; \qquad T_2 = 0.$$

Ответ: $T_1 = T_0 + \frac{1}{2}mg, \quad T_2 = T_0 - \frac{1}{2}mg, \quad$ если $\quad mg < 2T_0.$

$$T_1 = mg, \quad T_2 = 0, \quad \text{если} \quad mg > 2T_0. \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Примечание: если уравнение (4) не обосновано, то **отнимаем 2 балла.**

4. Открытая с обоих концов однородная тонкая трубка длиной $2L$, согнутая посередине в виде буквы V с углом 90° при вершине, расположена в вертикальной плоскости. Колена трубки составляют угол 45° с горизонтом. Трубка заполнена: левое колено наполовину маслом, наполовину водой, в правом колене — столбик воды длиной $\frac{5}{6}L$. Трубку начали медленно поворачивать вправо — из неё стала вытекать вода. При некотором угле правого колена относительно горизонта вместе с водой начало вытекать масло. Найдите этот угол. Эффектами поверхностного натяжения пренебречь.

Решение.

Пусть $\rho_м$ и $\rho_в$ — плотности масла и воды, соответственно. В начальном положении равенство давлений, создаваемых жидкостями в коленах, даёт:

$$\left(\rho_м g\frac{L}{2}+\rho_в g\frac{L}{2}\right)\cos 45^\circ=\rho_в g\frac{5L}{6}\sin 45^\circ. \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Отсюда

$$\frac{\rho_м}{\rho_в}=\frac{2}{3}. \qquad (1)$$

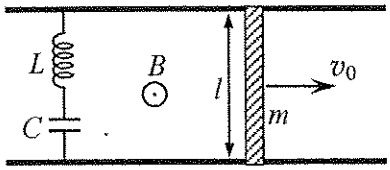
Масло начнет подниматься по правому колену и выливаться вместе с водой, когда нижний край столбика масла окажется в самой нижней точке левого колена. При этом всё правое колено заполнено водой. Равенство давлений, создаваемых жидкостями в коленах, теперь даёт:

$$\rho_м g\frac{L}{2}\cos\alpha=\rho_в L\sin\alpha \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha=\frac{\rho_м}{2\rho_в}. \quad (2) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Отсюда с учетом (1) получим: $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{3}$.

Ответ: $\alpha=\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)$. **(2 б.)**

5. Первоначально покоящейся проводящей перемычке массы m и длины l ударом сообщили скорость v_0 , и она начала без трения скользить по горизонтальным проводящим рельсам, концы которых соединены последовательно включенными катушкой индуктивностью L и первоначально разряженным конденсатором ёмкостью C. Вертикально приложено однородное магнитное поле с индукцией B. Пренебрегая сопротивлением перемычки и рельсов, найти максимальный ток I_m в цепи.



Решение.

При движении перемычки в цепи возникает э.д.с. индукции $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -Blv$, где Φ — поток магнитного поля внутри цепи, v — скорость перемычки. При этом падения напряжений на конденсаторе q/C и на катушке $L\Delta I/\Delta t$ равны в сумме этой э.д.с.:

$$L\frac{\Delta I}{\Delta t} + \frac{q}{C} = -Blv \qquad (1)$$ **(2 б.)**

Возникающий в результате ток в перемычке приводит к силе Ампера $F_A = IBl$, так что уравнение движения перемычки можно записать в виде:

$$m\frac{dv}{dt} = IBl, \qquad (2)$$ **(1 б.)**

С учётом того, что $\Delta q = I\Delta t$, из (1) и (2) следует

$$m(v - v_0) = -qBl\,. \qquad (3)$$ **(2 б.)**

Когда ток в цепи максимален, $\Delta I/\Delta t = 0$. **(1 б.)**

В этом случае из (1) следует

$$q = CBlv\,. \qquad (4)$$ **(1 б.)**

Из (3) и (4) найдём:

$$v = \frac{v_0}{1 + CB^2l^2/m}, \quad q = \frac{CBlv_0}{1 + CB^2l^2/m}$$

и подставив эти выражения в закон сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} + \frac{mv^2}{2},$$ **(2 б.)**

получим **ответ:** $I_m = v_0Bl\sqrt{\frac{C}{L(1 + CB^2l^2/m)}}$. **(1 б.)**

6. Человек бросает снежок как можно дальше. Оценить среднюю силу, с которой рука действует на снежок во время броска. Предполагается, что Вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения задачи величины, выбрать их числовые значения и получить численный результат.

Решение.

Наибольшая дальность достигается при броске под углом 45°. При этом начальная скорость снежка v и дальность его полёта L связаны соотношением:

$$L = \frac{v^2}{g}. \qquad (1)$$ **(3 б.)**

Работа силы F, с которой рука действует на снежок во время броска, равна кинетической энергии снежка:

$$F \cdot l \simeq \frac{mv^2}{2}, \qquad (2)$$ **(4 б.)**

где l — путь, проходимый снежком вместе с рукой при броске, а m — масса снежка.

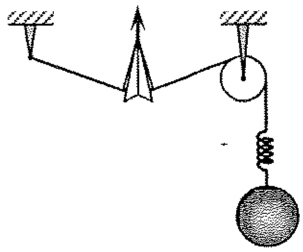
Из (2) с помощью (1) находим

$$F \simeq mg\frac{L}{2l}. \qquad (3)$$ **(1 б.)**

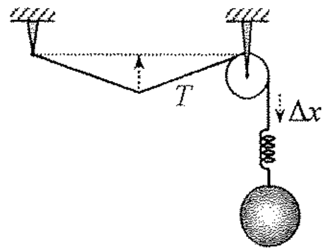
При $m \simeq 0.1$ кг, $L \simeq 30$ м, $l \simeq 0.5$ м и $g = 10$ м/с^2, получаем $F \simeq 30$ Н.

Ответ: примерно 30 Н. **(2 б.)**

7. Один конец нити (тетивы), которую можно считать нерастяжимой, закреплён, а второй перекинут через блок и прикреплён к тяжёлому грузу. Полученную систему используют как «гравитационный лук»: лёгкую стрелу размещают в центре конструкции на тетиве, оттягивают тетиву и отпускают. Выясняется, что такой лук стреляет невысоко. Конструкцию усовершенствуют с помощью пружины, которую прикрепляют одним концом к тетиве, а вторым к грузу. Лук начинает стрелять значительно лучше. Объясните наблюдаемое явление.



Решение:



Энергия E, переданная стреле, равна работе A, совершённой нитью над стрелой. В свою очередь, эту работу можно выразить как произведение перемещения Δx нити (справа от блока) на среднее натяжение нити $T_{ср}$:

$$E = A = \Delta x\, T_{ср}.$$

В обоих случаях перемещение Δx одинаково, т. к. оно задаётся оттягиванием нити. Сравним теперь натяжение нити с пружиной и без пружины.

С пружиной натяжение нити определяется натяжением пружины. В первый момент после отпускания стрелы, когда удлинение пружины ещё не успело измениться, натяжение равно весу груза (Mg). В дальнейшем натяжение пружины (и нити) уменьшается, но среднее значение натяжения остаётся того же порядка величины:

$$T_{ср} \sim Mg\,.$$

В этом случае энергия первоначально растянутой пружины почти целиком переходит в кинетическую энергию стрелы.

Без пружины груз после отпускания стрелы находится практически в свободном падении, так как масса стрелы мала по сравнению с массой груза. Поэтому натяжение нити мало по сравнению с Mg:

$$T_{ср} \ll Mg\,.$$

Исключение составляет малый участок перемещения груза до наинизшего положения, когда нить практически распрямляется. На этом малом участке высвобождается практически вся запасённая энергия (которая к этому моменту сосредоточена в кинетической энергии груза). Чтобы на малом перемещении передать её стреле требуется очень большая сила. На этом участке сила натяжения нити действительно резко возрастает, но её проекция на направление движения стрелы во много раз меньше, а воздействие на левую опору и блок велико. В результате значительная часть запасённой энергии передаётся не стреле, а опорам и переходит в тепло, как при неупругом ударе.

Таким образом, энергия, переданная стреле, оказывается значительно большей при наличии пружины. Поэтому с пружиной лук стреляет значительно лучше.