Решения задач по физике
открытой межвузовской олимпиады школьников СФО «Будущее Сибири»
II (заключительный) этап, 2015–2016 учебный год

Каждая правильно решенная задача оценивается в 10 баллов.

Физика 8 класс

1. В теплоизолированный бак налили 9 литров воды с температурой 20°С. Затем в бак с водой стали бросать нагретые до 220°С камни. Вода закипела ровно в тот момент, когда бак оказался наполненным до краёв (все камни полностью погружены в воду). Найдите объём бака, если известно, что плотность камней в 2,5 раза больше плотности воды, а их удельная теплоёмкость (на единицу массы) в 5 раз меньше удельной теплоёмкости воды. Считать, что перед бросанием каждого следующего камня успевает установиться тепловое равновесие, потерями тепла пренебречь. Температура кипения воды 100°С.

Решение.

Камни отдают тепло, охлаждаясь от температуры $T_{\text{кам}}$ = 220°С до $T_{\text{кип}}$ = 100°С, нагревая воду от температуры $T_{\text{в}}$ = 20°С до $T_{\text{кип}}$. Запишем уравнение теплового баланса

$$c_{\text{в}} m_{\text{в}} \left(T_{\text{кип}} - T_{\text{в}}\right) = c_{\text{кам}} m_{\text{кам}} \left(T_{\text{кам}} - T_{\text{кип}}\right), \qquad (1) \qquad \textbf{(5 б.)}$$

где $c_{\text{в}}$, $m_{\text{в}}$ и $c_{\text{кам}}$, $m_{\text{кам}}$ удельные теплоёмкости и массы воды и камней, соответственно.
Объём бака V складывается из объёма воды $V_{\text{в}}$ и объёма камней $V_{\text{кам}}$:

$$V = V_{\text{в}} + V_{\text{кам}}. \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Выражая отсюда $V_{\text{кам}}$ и вводя плотности воды и камней $\rho_{\text{в}}$ и $\rho_{\text{кам}}$, подставим в (1):

$$c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} V_{\text{в}} \left(T_{\text{кип}} - T_{\text{в}}\right) = c_{\text{кам}} \rho_{\text{кам}} \left(V - V_{\text{в}}\right)\left(T_{\text{кам}} - T_{\text{кип}}\right)$$

Выразим объём бака:

$$V = V_{\text{в}} \left(1 + \frac{c_{\text{в}}}{c_{\text{кам}}} \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{кам}}} \frac{\left(T_{\text{кип}} - T_{\text{в}}\right)}{\left(T_{\text{кам}} - T_{\text{кип}}\right)}\right). \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Подставив численные значения, получим

ответ: $V = 21$ л. **(2 б.)**

2. Человек, выгуливая собаку, идёт по прямому тротуару с постоянной скоростью u = 5 км/ч. Собака стартует от него и бежит вперёд на всю длину поводка с постоянной скоростью v = 15 км/ч. Когда поводок натягивается, собака разворачивается и бежит обратно к хозяину. Достигнув хозяина, собака повторяет свой маршрут. Какой путь пройдёт человек, когда собака вернётся к нему N = 100 раз? Длина поводка l =10 м.

Решение.

Собака пробегает вперёд от хозяина до натяжения поводка расстояние l за время

$$t_1 = \frac{l}{u - v}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Обратно к хозяину собака пробегает это же расстояние за время

$$t_2 = \frac{l}{u + v}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Тогда на N циклов собаке потребуется время

$$T = N\left(t_1 + t_2\right) = \frac{2Nlu}{u^2 - v^2}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

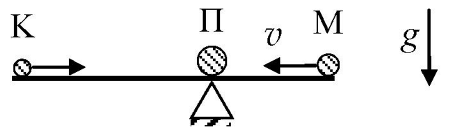
За это время человек пройдёт расстояние

$$L = vT = \frac{2Nlvu}{u^2 - v^2}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Подставив численные значения, получим

ответ: $L = 750$ м. **(2 б.)**

3. На противоположных концах лёгких разноплечих весов сидят Муха-Цокотуха и Комар. У основания весов находится Паук. Известно, что масса Паука в 2 раза больше, чем масса Мухи, и в 4 раза больше, чем масса Комара. Изначально весы находились в равновесии в горизонтальном положении. Затем Муха и Комар начинают двигаться навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v. С какой скоростью и в каком направлении должен двигаться Паук, чтобы весы оставались горизонтальными?



Решение.

Пусть масса Комара m, тогда масса Мухи $2m$, а Паука $4m$. Обозначим длины рычагов весов, на которых сидят Муха и Комар за l и L соответственно. Запишем условие равновесия в начальный момент времени, выражающееся в равенстве моментов сил, приложенных к рычагам весов:

$$2mgl = mgL, \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где g — ускорение свободного пробега. Тогда

$$L = 2l. \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Через время t после того, как Муха и Комар начнут двигаться, сумма моментов сил, действующих на весы относительно точки опоры, будет равна

$$N = mg(2l - vt) - 2mg(l - vt). \qquad \textbf{(1 б.)}$$

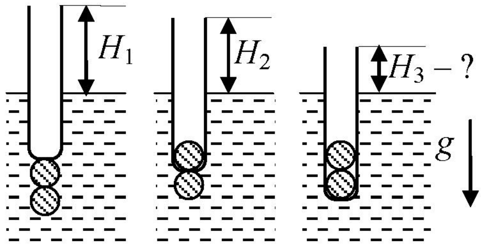
Чтобы весы оставались горизонтальными Паук тоже должен начать двигаться со скоростью $v_п$ в сторону Мухи Тогда условие равновесия перепишется в виде

$$mg(2l - vt) = 2mg(l - vt) + 4mgv_пt. \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Выразив отсюда скорость паука, получим

ответ: $v_п = v/4$, в сторону Мухи. **(2 б.)**

4. В воде плавает цилиндрическая пробирка, к основанию которой прикреплено два одинаковых куска пластилина. При этом расстояние от верхнего края до уровня воды — H_1. Один кусок пластилина переместили внутрь пробирки, после чего расстояние от верхнего края пробирки до уровня воды стало равно H_2. Каким будет расстояние от верхнего края пробирки до уровня воды, если и второй кусок пластилина переместить внутрь пробирки?



Решение.

Сначала на пробирку действуют сила тяжести пробирки $F_{\text{тпр}}$, сила тяжести двух кусков пластилина $2F_{\text{тпл}}$, сила Архимеда со стороны пластилина $2F_{\text{Апл}}$, и сила Архимеда со стороны пробирки $F_{\text{тпр}} = \rho S(L–H_1)g$, где ρ — плотность воды, S и L — площадь сечения и длина пробирки, а g — ускорение свободного падения. Запишем второй закон Ньютона для этого случая:

$$F_{\text{тпр}} + 2F_{\text{тпл}} = 2F_{\text{Апл}} + \rho S(L - H_1)g. \qquad (1) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

После того как один кусок пластилина переложили внутрь пробирки второй закон Ньютона перепишется в виде

$$F_{\text{тпр}} + 2F_{\text{тпл}} = F_{\text{Апл}} + \rho S(L - H_2)g. \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Если второй один кусок пластилина переложить внутрь пробирки, то второй закон Ньютона перепишется в виде

$$F_{\text{тпр}} + 2F_{\text{тпл}} = \rho S(L - H_3)g. \qquad (3) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Вычтя из (1) удвоенное уравнение (2) и добавив (3), получим:

$$0 = \rho S(L - H_1)g - 2\rho S(L - H_2)g + \rho S(L - H_3)g.$$

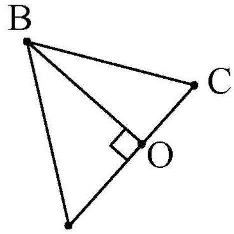
Выражая отсюда H_3, получим

ответ: $H_3 = 2H_2 - H_1$ **(2 б.)**

Физика 9 класс

1. Деревня А одинаково удалена от деревни В и от железнодорожной станции С. Из пункта А в сторону станции в момент времени t_1 = 10 часов вышел точно знающий дорогу местный житель. В t_2 = 12 часов из пункта В на станцию отправился дачник. В t_3 = 13 часов они встретились в лесу, двигаясь перед встречей в перпендикулярных направлениях. После встречи дачник последовал за местным жителем, и в t_4 = 15 часов они пришли в пункт назначения. Во сколько раз дачник шел быстрее местного жителя до встречи с ним? Местный житель всё время двигался прямолинейно с постоянной скоростью, дачник до встречи с местным жителем двигался прямолинейно с постоянной скоростью.

Решение.



Так как к месту встречи (точка О) местный житель и дачник шли, двигаясь в перпендикулярных направлениях, то точка О и деревни А и В расположены в вершинах прямоугольного треугольника, с гипотенузой АВ, и катетами АО и ВО. Пусть $v_ж$ и $v_д$ — скорости местного жителя (до встречи) и дачника, соответственно. Тогда

$$\mathrm{AO} = v_ж(t_3 - t_1), \quad (1)$$ **(1 б.)**

$$\mathrm{BO} = v_д(t_3 - t_2), \quad (2)$$ **(1 б.)**

$$\mathrm{AC} = v_ж(t_4 - t_1). \quad (3)$$ **(1 б.)**

По теореме Пифагора, $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AO}^2 + \mathrm{BO}^2$. По условию задачи АВ = АС, поэтому

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AO}^2 + \mathrm{BO}^2. \quad (4)$$ **(4 б.)**

С учетом (1) - (4) имеем

$$v_ж^2(t_4 - t_1)^2 = v_ж^2(t_3 - t_1)^2 + v_д^2(t_3 - t_2)^2$$

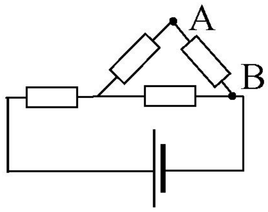
Отсюда находим отношение скоростей

$$\frac{v_д}{v_ж} = \frac{\sqrt{(t_4 - t_1)^2 - (t_3 - t_1)^2}}{t_3 - t_2}$$

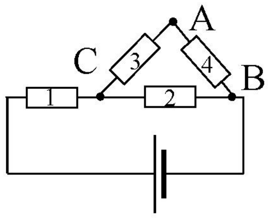
Подставив численные значения параметров, получаем

ответ: $\dfrac{v_ж}{v_д} = 4$. **(3 б.)**

2. У школьника Пети имеется набор из четырёх резисторов с сопротивлениями 2, 0, 1 и 6 Ом и идеальная батарейка. Он собрал из них электрическую схему, показанную на рисунке. Определите, где стоит какое сопротивление, если известно, что напряжение между точками А и В максимально возможное в данной схеме. В качестве ответа нарисуйте схему и проставьте на ней необходимые значения сопротивлений, ответ обоснуйте.



Решение.



Пронумеруем резисторы (см. рисунок) и обозначим их сопротивления R_1, R_2, R_3 и R_4. Обозначим ЭДС батареи $\mathscr{E}$. Ясно, что $R_2 \neq 0$, так как при этом напряжения $U_{AB} = U_{BC} = 0$. Очевидно, что должно быть $R_4 > R_3$. Допустим $R_1 = 0$ Ом. Тогда U_{AB} от R_2 не зависит и тем больше, чем больше отношение R_4/R_3, то есть когда $R_3 = 1$ Ом, а $R_4 = 6$ Ом. При этом

$$U_{AB} = \mathscr{E}\frac{R_4}{R_3 + R_4} = \frac{6}{7}\mathscr{E}. \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Если же допустить, что $R_1 \neq 0$, то $R_3 = 0$ Ом (что следует из вышеприведённых рассуждений). Тогда эквивалентное сопротивление участка BC равно

$$R_{BC} = \frac{R_4 R_2}{R_4 + R_2}, \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

а напряжение

$$U_{AB} = U_{BC} = \mathscr{E}\frac{R_{BC}}{R_1 + R_{BC}}. \qquad (3) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

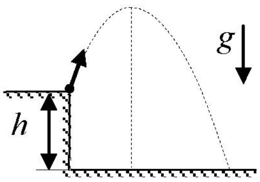
Согласно (2), $R_{BC} < 6$ Ом. Поскольку при этом мы предположили, что $R_1 \geq 1$ Ом, то из (3) следует, что $U_{AB} < \frac{6}{7}\mathscr{E}$. Таким образом наибольшее значение U_{AB} даётся уравнением (1) в предположении, что $R_1 = 0$ Ом.

Ответ: $R_1 = 0$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 1$ Ом, $R_4 = 6$ Ом. **(4 б.)**

(по 1-му баллу за правильное нахождение каждого сопротивления)

Примечание: любые логичные рассуждения, приводящие к этому ответу, оцениваются в 10 баллов.

3. С выступа высотой h бросили камень под углом к горизонту. Определите, насколько время подъёма камня до верхней точки траектории меньше, чем время падения от верхней точки до земли, если известно, что камень находился в воздухе время T. Ускорение свободного падения g. Влиянием воздуха пренебречь.



Решение.

Пусть время подъёма камня до верхней точки траектории T_1, а время падения от верхней точки до земли T_2. Запишем уравнения движения камня на этих участках

$$H - h = \frac{gT_1^2}{2}, \qquad (1) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

$$H = \frac{gT_2^2}{2}. \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

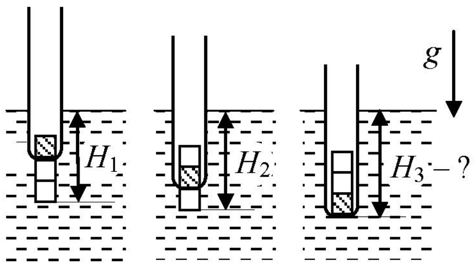
Здесь H — высота верхней точки траектории камня относительно уровня земли. Вычитая (1) из (2), получаем

$$h = \frac{g}{2}\left(T_2^2 - T_1^2\right) = \frac{g}{2}\left(T_2 - T_1\right)\left(T_2 + T_1\right). \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Учитывая, что по условию, $T_1 + T_2 = T$, отсюда находим

ответ: $$T_2 - T_1 = \frac{2h}{gT}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

4. В воде плавает цилиндрическая пробирка, внутри которой находится магнит. Снизу к пробирке прицепили два одинаковых магнита друг за другом. При этом расстояние от нижнего края нижнего магнита до уровня воды — H_1. Нижний магнит переместили в пробирку, после чего расстояние от нижнего края оставшегося в воде магмагнита до уровня воды стало равно H_2. Каким будет расстояние H_3 от дна пробирки до уровня воды, если оставшийся в воде магнит переместить внутрь пробирки?



Решение.

Сначала на пробирку действуют сила тяжести пробирки $F_{\text{тпр}}$, сила тяжести трёх магнитов $3F_{\text{тм}}$, сила Архимеда со стороны магнитов $2F_{\text{Ам}}$, и сила Архимеда со стороны пробирки $F_{\text{тпр}} = \rho S(H_1–2h)g$, где ρ — плотность воды, S — площадь сечения пробирки, h — высота магнита, а g — ускорение свободного падения. Запишем второй закон Ньютона для этого случая:

$$F_{\text{тпр}} + 3F_{\text{тм}} = 2F_{\text{Ам}} + \rho S\left(H_1 - 2h\right)g. \qquad (1) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

После того как один магнит переложили внутрь пробирки второй закон Ньютона перепишется в виде

$$F_{\text{тпр}} + 3F_{\text{тм}} = F_{\text{Ам}} + \rho S\left(H_2 - h\right)g. \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Если второй один кусок пластилина переложить внутрь пробирки, то второй закон Ньютона перепишется в виде

$$F_{\text{тпр}} + 3F_{\text{тм}} = \rho S H_3 g. \qquad (3) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

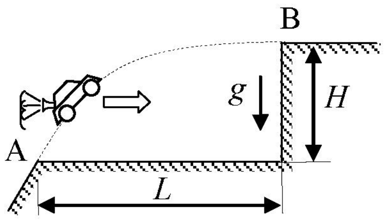
Вычтя из (1) удвоенное уравнение (2) и добавив (3), получим:

$$0 = \rho S H_1 g - 2\rho S H_2 g + \rho S H_3 g.$$

Выражая отсюда H_3, получим

ответ: $$H_3 = 2H_2 - H_1 \qquad \textbf{(2 б.)}$$

5. Снабженный ракетным двигателем автомобиль с помощью трамплина прыжком из точки старта A попал в точку B на плоской вершине горы, приземлившись горизонтально со скоростью, равной по величине скорости, с которой он оторвался от трамплина. Расстояние между пунктами A и B по горизонтали L, по вертикали H. Определите скорость, с которой автомобиль оторвался от трамплина. Двигатель автомобиля создавал направленную по горизонтали постоянную по величине тягу (обозначена стрелкой ⇨). Ускорение свободного падения g. Размерами автомобиля, изменением массы автомобиля и влиянием воздуха пренебречь.



Решение.

Пусть v — скорость автомобиля в момент отрыва от трамплина, а v_x и v_y — её проекции на горизонтальную и вертикальную оси. Так как в момент приземления автомобиль двигался горизонтально, точка приземления является верхней точкой его траектории. Поэтому

$$H = \frac{gt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2H}{g}}, \qquad (1)$$ **(2 б.)**

$$v_y = gt, \qquad (2)$$ **(2 б.)**

где t — время полёта автомобиля. Уравнение движения автомобиля в горизонтальном направлении удобнее записать с помощью средней скорости

$$L = \frac{v_x + v}{2}t \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{2L}{t} - v. \qquad (3)$$ **(2 б.)**

Здесь учтено, что горизонтальная составляющая скорости автомобиля в момент приземления равна v. С другой стороны,

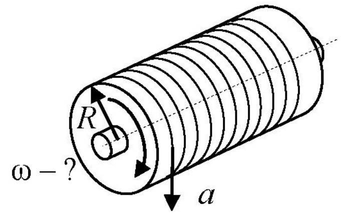
$$v^2 = v_x^2 + v_y^2,$$ **(2 б.)**

Подставив сюда v_x из (3), v_y из (2), а затем t из (1), найдём

ответ: $$v = \sqrt{\frac{gH}{2}\left(\frac{L}{H} + \frac{H}{L}\right)}.$$ **(2 б.)**

Физика 10 класс

1. Найти угловую скорость, до которой будет раскручен круглый изначально не вращающийся маховик радиуса R с помощью тонкой верёвки длины L, которую вытягивают с постоянным ускорением a. Верёвка не проскальзывает.



Решение.

Пусть верёвку вытягивали в течение периода времени t. В конце этого периода скорость верёвки

$$v = at \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

равна линейной скорости обода маховика:

$$v = \omega R, \qquad (2) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

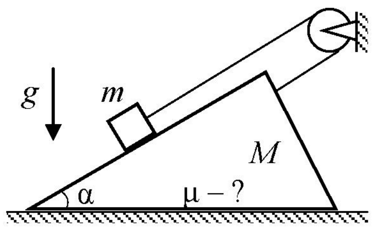
а конец, за который тянули верёвку, сместился на расстояние

$$L = \frac{at^2}{2}. \qquad (3) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

Выразив t из (1) и подставив в (3), найдём $v = \sqrt{2aL}$. Подставив полученное выражение в (2), найдём

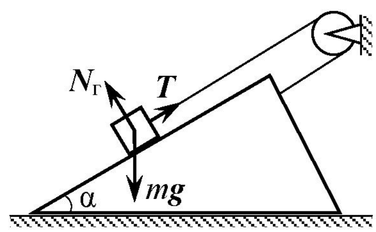
$$\textbf{ответ: } \omega = \frac{\sqrt{2aL}}{R}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

2. На горизонтальном столе располагается система, состоящая из клина массы M с углом при основании α и лежащего на нём груза массы m. Клин и груз соединены лёгкой нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок, как показано на рисунке (прямые отрезки верёвки параллельны наклонной поверхности клина). При каком минимальном коэффициенте трения между клином и столом система будет находиться в покое? Трения между клином и грузом нет.



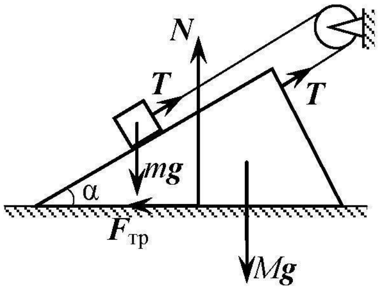
Решение.

На груз действует сила тяжести $m\mathbf{g}$, направленная вниз, сила натяжения нити $\mathbf{T}$, направленная вдоль наклонной плоскости, и сила реакции $\mathbf{N}_г$, перпендикулярная ей. Поскольку груз покоится, сумма этих сил равна нулю. Запишем это условие в проекции на ось, направ-



ленную вдоль наклонной плоскости:

$$T = mg\sin\alpha. \qquad (1)$$ **(2 б.)**



На систему «клин+груз» действует суммарная сила тяжести $(M+m)\mathbf{g}$, направленная вниз, сила реакции опоры **N**, направленная вверх, горизонтальная сила трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ и суммарная сила натяжения 2**T** со стороны обоих концов верёвки, направленная вдоль наклонной плоскости. Поскольку система покоится, сумма этих сил равна нулю. Запишем это условие в проекции на вертикальную ось:

$$(M+m)g = N + 2T\sin\alpha, \qquad (2)$$ **(3 б.)**

а также в проекции на горизонтальную ось:

$$F_{\text{тр}} = 2T\cos\alpha. \qquad (3)$$ **(2 б.)**

При искомом минимальном коэффициенте трения μ

$$F_{\text{тр}} = N\mu. \qquad (4)$$ **(1 б.)**

Подставив (4) в (3), найдём:

$$\mu = \frac{2T}{N}\cos\alpha.$$

Подставив сюда N, выраженное из (2), а затем T из (1), найдём

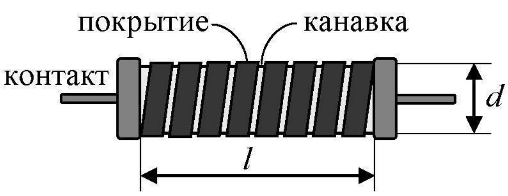
$$\mu = \frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{\dfrac{M}{m} + 1 - 2\sin^2\alpha} \qquad (5)$$

И после тригонометрических преобразований получим

ответ: $\mu = \dfrac{\sin 2\alpha}{\dfrac{M}{m} + \cos 2\alpha}$. **(2 б.)**

Примечание: ответ в форме (5) без тригонометрических преобразований также считать допустимым.

3. Резистор изготавливают из непроводящего керамического цилиндра длиной $l = 1$ см и диаметром $d = 2$ мм, на который наносят тонкое проводящее покрытие и затем прорезают



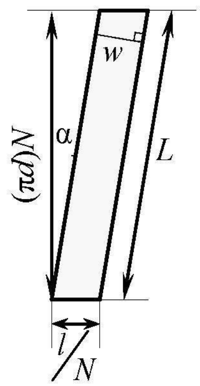
его тонкой спиральной непроводящей канавкой, а на торцы цилиндра напрессовывают контакты. Если канавку не прорезать, то получится резистор сопротивлением $R_0 = 1$ Ом. Сколько витков должна иметь равномерная спиральная канавка, чтобы резистор имел сопротивление $R = 160$ Ом? Шириной канавки и вкладом приконтактных областей малого размера пренебречь. Ответ округлить до целого.

Решение.

Без прорезанной канавки развёртка проводящего покрытия представляет собой прямоугольник длиной l и шириной πd. Толщину покрытия обозначим буквой δ. Сопротивление такого резистора равно

$$R_0 = \rho \frac{l}{\delta(\pi d)}, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где ρ — удельное сопротивление покрытия.



Развёртка покрытия после прорезания спиральной канавки показана на рисунке (N — число витков спирали). Заметим, что площадь получившегося параллелограмма $(\pi d)N \cdot l/N$ равна площади исходного покрытия $(\pi d)l$ (шириной канавок пренебрегаем). При большом числе витков N угол α можно считать малым. Если в соответствие с условием пренебречь вкладами приконтактных областей, сопротивление получившейся плёнки можно записать в виде:

$$R = \rho \frac{L}{\delta\, w}. \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Подставив сюда найденные из рисунка с помощью тригонометрических формул выражения для

$$L = \frac{\pi d\, N}{\cos\alpha} \qquad \textbf{(1 б.)}$$

и

$$w = \frac{l}{N}\cos\alpha \qquad \textbf{(1 б.)}$$

и разделив получившееся уравнение на (1), получим

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{\pi d\, N}{l\cos\alpha}\right)^2 \qquad (3)$$

и найдём

$$N=\frac{l}{\pi d}\sqrt{\frac{R}{R_0}}\cos\alpha\approx\frac{l}{\pi d}\sqrt{\frac{R}{R_0}},\qquad \textbf{(2 б.)}$$

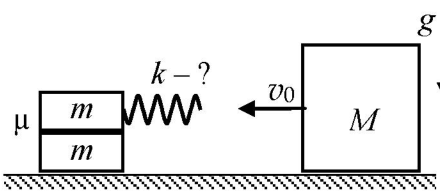
положив (с учётом малости α и необходимости округления) $\cos\alpha\approx1$. Подставив численные значения, получим

$$\textbf{ответ: } N\approx\frac{1}{3\cdot0.2}\sqrt{\frac{160}{1}}\approx20.\qquad \textbf{(2 б.)}$$

Примечание1: если не пренебрегать малостью cos α, а вместо этого подставить в (3) $\cos\alpha=\frac{\pi d}{\sqrt{(\pi d)^2+(l/N)^2}}$ и выразить N, то получим $N=\frac{l}{\pi d}\sqrt{\frac{R}{R_0}-1}$, что после подстановки численных значений и округления приведёт к тому же ответу.

Примечание2: если в решении приведены формулы, в которых сразу положено cos α = 1, то такое решение считать приемлемым и оценивать так же.

4. На гладком горизонтальном столе лежат друг на друге два одинаковых бруска массой m каждый. Коэффициент трения между ними равен μ. К верхнему бруску прикреплена лёгкая пружина. На эту конструкцию со стороны пружины налетает брусок массой M со скоростью v_0. При какой максимальной жёсткости k пружины верхний брусок не сместится относительно нижнего? Пружина достаточно длинная, так что сжимается не полностью. Трения о поверхность стола нет. Ускорение свободного падения равно g.



Решение.

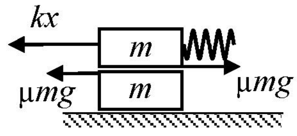
Рассмотрим момент максимального сжатия пружины x. В этот момент все бруски движутся с одинаковой скоростью. Обозначим эту скорость буквой u и запишем закон сохранения импульса для системы трёх брусков:

$$Mv_0=(M+2m)u,\qquad (1)\qquad \textbf{(2 б.)}$$

а также закон сохранения энергии, учитывающий энергию $\frac{kx^2}{2}$ сжатой пружины:

$$\frac{Mv_0{}^2}{2}=\frac{(M+2m)u^2}{2}+\frac{kx^2}{2}.\qquad (2)\qquad \textbf{(3 б.)}$$

Максимальная сила трения между верхним и нижним брусками равна $(mg)\mu$. Запишем второй закон Ньютона для го-



ризонтальных проекций сил, действующих на верхний брусок:

$$ma_{\text{в}} = kx - \mu(mg), \qquad (3) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

где $a_{\text{в}}$ — ускорение верхнего бруска. Также запишем второй закон Ньютона для горизонтальных проекций сил, действующих на нижний брусок:

$$ma_{\text{н}} = \mu(mg), \qquad (4) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

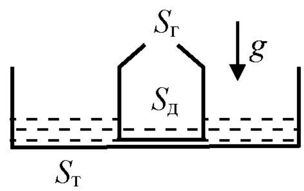
где $a_{\text{н}}$ — ускорение нижнего бруска.

То есть, чтобы бруски не раздвинулись, ускорения нижнего и верхнего брусков должны быть одинаковы, а из (3) и (4) при искомой максимальной k должно быть:

$$2\mu(mg) = kx. \qquad (5) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Выразив u из (1), x из (5) и подставив в (2), найдём

$$\textbf{ответ: } k = 4\left(\frac{\mu g}{v_0}\right)^2 m\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{M}\right). \qquad \textbf{(2 б.)}$$



5. Садовод-любитель поставил в пустой цилиндрический таз площадью $S_{\text{т}} = 500$ см^2 пустую открытую банку массой $m = 100$ г, площадью дна $S_{\text{д}} = 50$ см^2 и горловины $S_{\text{г}} = 20$ см^2. Пошёл дождь — таз и банка начали наполняться водой. Через некоторое время стоявшая на дне банка начала вертикально всплывать. Определите, сколько осадков (высота выпавшего слоя воды в мм) выпало к этому моменту. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

Решение.

Пусть высота выпавших осадков равна h. Это значит, что объём осадков (воды), прошедший через сечение S, равен $h\cdot S$. Объём воды в банке равен $h\cdot S_{\text{г}}$, а в тазу — $h\cdot(S_{\text{т}} - S_{\text{г}})$. Значит, высота воды в тазу равна

$$H = h\frac{S_{\text{т}} - S_{\text{г}}}{S_{\text{т}} - S_{\text{д}}}. \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Поскольку банка с водой начала всплывать, действующая на неё сила тяжести $(m + \rho h S_{\text{г}})g$, где $\rho = 1$ г/см^3 — плотность воды, равна силе Архимеда $\rho g V$, где $V = h\,S_{\text{д}}$ — объём вытесненной воды:

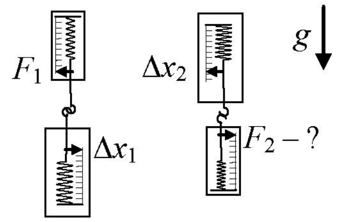
$$(m + \rho h S_{\text{г}})g = \rho g H S_{\text{д}}. \qquad (2) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Подставив сюда H из (1), найдём

$$h = \frac{m}{\rho S_{т}} \frac{S_{т} - S_{д}}{S_{д} - S_{г}} \qquad (3)$$ **(2 б.)**

и, подставив численные значения, получим

ответ: $h = \frac{100}{1 \cdot 500} \cdot \frac{450}{30} \approx 3\ \text{см} = 30\ \text{мм}$. **(2 б.)**



1. У одного динамометра шкала проградуирована в ньютонах, а у второго — в сантиметрах. Когда к первому динамометру подвесили вертикально второй, сцепив их пружинами, первый показал F_1, а второй — Δx_1. Когда, наоборот, ко второму динамометру подвесили первый, второй динамометр показал Δx_2. Какую силу F_2 показал при этом первый динамометр?

Решение.

Согласно третьему закону Ньютона, силы, действующие на пружины сцепленных динамометров, одинаковы.

Таким образом, сила, действующая на второй динамометр в первом эксперименте, равна F_1. Следовательно,

$$F_1 = k\,\Delta x_1, \qquad (1) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

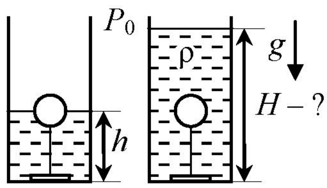
где k — жёсткость пружины второго динамометра. Аналогично, во втором эксперименте

$$F_2 = k\,\Delta x_2. \qquad (2) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Выразив F_2 из (1) и (2), получим

ответ: $$F_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} F_1. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

2. На дне сосуда находится тонкая невесомая пластинка, под которую не подтекает вода. К пластинке на нити привязан невесомый шарик. Если в сосуд медленно наливать воду, то пластинка начинает отрываться от дна, когда шарик оказывается наполовину погруженным в воду. В этот момент уровень воды в сосуде равен h. Если же до того, как пластинка начнёт отрываться, придержать шарик и налить в сосуд много воды, то пластинка перестаёт отрываться от дна, даже если шарик не придерживать. При каком минимальном уровне воды H в сосуде это возможно? Ускорение свободного падения g, атмосферное давление P_0, плотность воды ρ.



Решение.

В первом случае пластинка отрывается от дна сосуда, когда сила давления воды на пластинку (вниз) уравновешивается силой Архимеда F_{A1}, действующей на шарик, погруженный в воду наполовину. Запишем уравнение баланса сил:

$$(P_0 + \rho g h)S = F_{A1}, \qquad (1) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

где S — площадь пластинки, $(P_0 + \rho g h)$ — давление воды вблизи дна сосуда.

Во втором случае шарик полностью погружен в воду, и поэтому сила Архимеда F_{A2}, действующая на шарик, вдвое больше, чем в первом случае:

$$F_{A2} = 2F_{A1}. \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

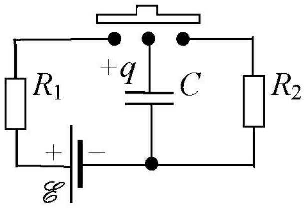
Как и в первом случае, отрыв пластины произойдёт, когда сила давления воды на пластинку сравняется с силой Архимеда:

$$(P_0 + \rho g H)S = F_{A2}. \qquad (3) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

Найдя H из системы уравнений (1) – (3), получим

ответ: $H = \dfrac{P_0}{\rho g} + 2h$. **(2 б.)**

3. Представленная на рисунке схема состоит из идеальной батареи с ЭДС $\mathcal{E}$, двух резисторов с сопротивлениями R_1 и R_2, конденсатора ёмкостью C, заряженного зарядом q (полярность показана на рисунке), и кнопки. Кнопку нажимают, замыкая сразу три контакта (отмечены маленькими кружками). Найти отношение тока через резистор R_1, возникающего сразу после нажатия кнопки, к току, протекающему через этот резистор спустя достаточно длительное время, когда система выходит на установившийся (стационарный) режим.



Решение.

Сразу после нажатия кнопки заряд на конденсаторе останется прежним. (Это следует из того, что конденсатор в данной схеме разряжается через резисторы, и поэтому ток разрядки конденсатора не может быть сколь угодно большим.) Поэтому напряжение $U_к$ на конденсаторе сразу после нажатия кнопки равно

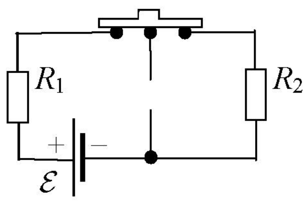
$$U_к = q/C\,. \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Напряжение U_1 на резисторе R_1 в этот момент времени равно $\mathcal{E} - U_к$, **(1 б.)**

а ток $I_{1,нач}$ через резистор R_1 в этот момент, согласно закону Ома равен U_1/R_1. Таким образом,

$$I_{1,нач} = \frac{\mathcal{E} - q/C}{R_1}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

После того, как система вышла на установившийся режим, заряд на конденсаторе перестал меняться. Значит, ток через проводники, подсоединённые к конденсатору, прекратился. Поэтому токи в остальной части цепи будут такими же, как в аналогичной цепи с отсутствующим конденсатором, вместо которого оставлен разрыв (см. рисунок). Следовательно, установившийся ток $I_{1,уст}$ через резистор R_1 можно найти, применяя закон Ома для полной цепи к контуру, состоящему из батареи с ЭДС $\mathcal{E}$ и двух резисторов R_1 и R_2:

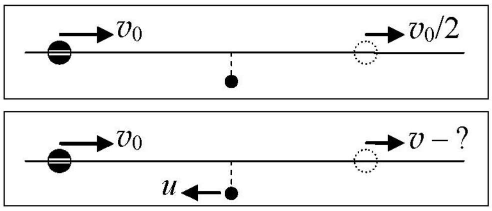


$$I_{1,уст} = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}. \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Разделив $I_{1,нач}$ на $I_{1,уст}$, получим

ответ: $$\frac{I_{1,нач}}{I_{1,уст}} = \frac{\mathcal{E} - q/C}{\mathcal{E}}\;\frac{R_1 + R_2}{R_1}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

4. Заряженная бусинка свободно надета на прямую неподвижную непроводящую спицу, рядом с которой закреплён точечный заряд. Если бусинку прижимать к спице, между ними возникает трение (коэффициент трения постоянен). Бусинку запускают с большого расстояния слева от заряда со скоростью v_0. При этом на большом расстоянии справа от заряда её скорость устанавливается равной $v_0/2$ и в дальнейшем практически не меняется. Какой будет установившаяся скорость v бусинки справа, если во время её движения точечный заряд двигать влево с постоянной скоростью u, не меняя его расстояния от спицы? Силы тяжести нет.



Решение.

В результате прохождения бусинки мимо точечного заряда часть кинетической энергии бусинки тратится на преодоление трения. Запишем закон сохранения энергии в первом эксперименте:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m(v_0/2)^2}{2} + A_{\text{тр}}, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

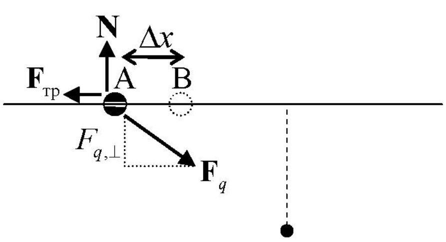
где m — масса бусинки, $mv_0^2/2$ и $m(v_0/2)^2/2$ — её начальная и конечная кинетическая энергия, $A_{\text{тр}}$ — работа силы трения в первом эксперименте.

Закон сохранения энергии во втором эксперименте сформулируем в системе отсчёта, в которой точечный заряд неподвижен. В этой системе начальная скорость бусинки равна $v_0 + u$, конечная скорость равна $v + u$. Таким образом,

$$\frac{m(v_0+u)^2}{2} = \frac{m(v+u)^2}{2} + A'_{\text{тр}}, \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где $A'_{\text{тр}}$ — работа силы трения во втором эксперименте, *измеренная в системе отсчёта, связанной с точечным зарядом*.

Убедимся в том, что $A_{\text{тр}} = A'_{\text{тр}}$. Для этого рассмотрим прохождение бусинкой малого отрезка пути между точками A и B (см. рисунок) в системе отсчёта, в которой заряд неподвижен. На бусинку действуют сила притяжения (или отталкивания) со стороны точечного заряда $\mathbf{F}_q$, сила реакции опоры $\mathbf{N}$ и сила трения скольжения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$. Величина силы трения зависит от проекции $F_{q\perp}$ силы $\mathbf{F}_q$ на плоскость, перпендикулярную бусинке: $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu|F_{q\perp}|$, где μ — коэффициент трения. Работа $\Delta A_{\text{тр}}$ силы трения на участке пути AB, следовательно, равна



$$\Delta A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} \Delta x = \mu |F_{q\perp}| \Delta x,$$

где Δx — расстояние AB. Если зафиксировать положение точек A и B относительно точечного заряда, то работа $\Delta A_{\text{тр}}$ не будет зависеть от скорости движения бусинки и от того, движется ли спица относительно точечного заряда (так как величина $F_{q\perp}$ определяется положением отрезка AB по отношению к заряду). Поэтому в обоих экспериментах работа $\Delta A_{\text{тр}}$ будет одинаковой. Так как это верно для любого отрезка AB пути бусинки, то это верно и для всего пути в целом. Таким образом,

$$A_{\text{тр}} = A'_{\text{тр}}. \qquad (3) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

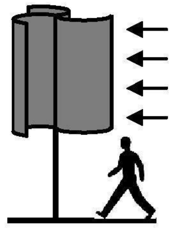
Из равенств (1) – (3) получим:

$$(v+u)^2 = (v_0+u)^2 - v_0^2 + \left(v_0/2\right)^2,$$

откуда, учитывая что $v > 0$, найдём

ответ: $$v = \sqrt{(v_0+u)^2 - \frac{3v_0^2}{4}} - u. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

5. Оцените электрическую мощность, вырабатываемую ветрогенератором изображённого на рисунке типа в ветреную погоду. *Предполагается, что Вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения задачи величины, выбрать их числовые значения и получить численный результат.*



Решение.

Ветрогенератор преобразует кинетическую энергию потока воздуха в электроэнергию.

Пусть S — поперечное сечение (перпендикулярно направлению ветра), заметаемое лопастями ветрогенератора. Найдём мощность P потока воздуха плотности ρ, проходящего со скоростью v через сечение S.

Объём воздуха ΔV, проходящий через сечение S за некоторое время Δt, равен

$$\Delta V = S\,v\,\Delta t\,. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Его масса равна $\Delta m = \rho\Delta V = \rho S\,v\,\Delta t$, а кинетическая энергия $\Delta E_{\text{кин}}$ равна

$$\Delta E_{\text{кин}} = \frac{\Delta m v^2}{2} = \frac{1}{2}\rho S v^3\,\Delta t\,.$$

Разделив энергию $\Delta E_{\text{кин}}$ на время Δt, получим мощность P, приносимую потоком ветра:

$$P = \frac{1}{2}\rho S v^3. \qquad (1) \qquad \textbf{(6 б.)}$$

Подставив в (1) числовые значения:

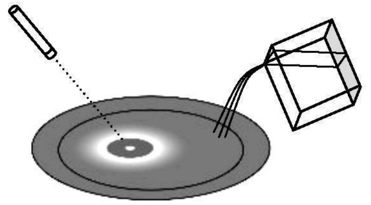
- площадь, захватываемая лопастями генератора, $S \approx 5$ м^2 (согласно рисунку),
- скорость ветра $v \approx 10$ м/с,
- плотность воздуха $\rho \approx 1$ г/л = 1 кг/м^3,

найдём $P \approx 2500$ Вт = 2,5 кВт.

При оптимальной конструкции ветрогенератора значительная доля мощности воздушного потока P переходит в электрическую энергию. (В то же время генератор не может «отобрать» у воздуха всю мощность P, так как это означало бы, что скорость воздуха обращается в ноль после прохождения через генератор, и тогда приток новых «порций» воздуха был бы невозможен.) Принимая для оценки, что вырабатываемая электрическая мощность составляет примерно $P/2$, получим

ответ: около 1 кВт. **(2 б.)**

6. *Задача-демонстрация (демонстрируется видеоролик).* Если направить в блюдечко с водой узкий пучок света, то вокруг яркого центрального пятна наблюдается темное колечко с резкими границами. Причём за внешней границей вновь видна светлая область. По мере наполнения блюдечка водой ширина тёмного колечка увеличивается. Объясните наблюдаемое явление.



Решение.

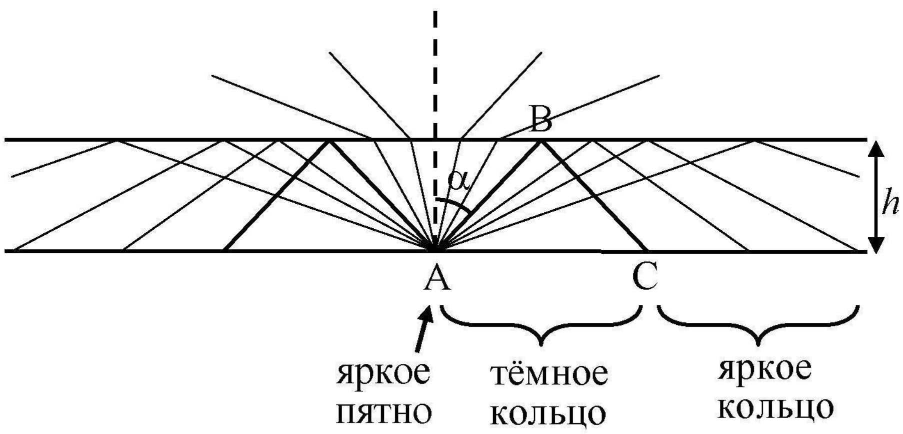
Освещённые области дна блюдечка являются источником рассеянного во все стороны света. **(2 б.)**

Глаз (камера) видит эти области дна (слегка приближенными из-за слоя воды, действующего как плоскопараллельная пластина). Рассмотрим, какие же области дна освещены. Имеет смысл не учитывать многократные отражения, так как яркость быстро убывает для каждого последующего отражения. Очевидно, освещена область, в которую после первого же преломления попадает свет от указки (область А). Лучи, рассеянные из области А под малыми углами к вертикали, практически полностью выходят из воды в воздух. **(1 б.)**

(Лишь небольшая доля их интенсивности отражается вниз от поверхности воды, её мы рассматривать не будем). По-другому ведут себя лучи, рассеянные из области А под углами к вертикали, превышающими угол

полного внутреннего отражения. **(4 б.)**

Эти лучи полностью отражаются вниз от поверхности воды. Поэтому ближайшая к области А освещённая точка дна есть точка С, в которую попадает луч, рассеянный из области А под углом полного внутреннего отражения α. Лучи, выходящие из А под бóльшими углами,



как видно из рисунка, попадают на дно в точках, лежащих на расстояниях от области А, больших |AC|. Они образуют освещённую область с резкой внутренней границей в виде окружности с радиусом |AC|. **(1 б.)**

Поэтому область внутри окружности радиуса |AC| является тёмной (за исключением центрального яркого пятна). Радиус тёмного кольца |AC| зависит от угла

полного внутреннего отражения α и толщины слоя воды h ($|\mathrm{AC}| = 2h\,\mathrm{tg}\,\alpha$). Как видно из этой формулы или из рисунка, $|\mathrm{AC}|$ растёт с увеличением h. **(2 б.)**
Поэтому при доливании воды ширина тёмного колечка увеличивается.